SOUS TANGENTE
à la courbe de l'exponentielle

- Fiche de repérage
- Fiche élève
- Scénario d'usage
- Une trace de travaux d'élèves : la construction géométrique attendue à la question 1.b) de la fiche élève
- Fiche technique

Niveau : Terminale S

Domaine : Equation différentielle, exponentielle, tangente, dérivée

Présentation : Il s'agit de motiver la recherche de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = k.f$.

- La première question de l'exercice présenté dans la fiche élève amène, par le calcul, à constater que la sous-tangente à l'exponentielle est constante.
- La présentation, en vidéoprojection, du fichier St 1 e.fig confirme le résultat établi ; l'exploration de quelques uns des fichiers disponibles (St xx.fig) montre que la sous-tangente aux courbes des fonctions affines, carré, racine carrée, sinus, cube, inverse n'est pas constante ; un débat entre les élèves peut amener, au cours de l'observation des représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ de quelques fonctions de référence, à conjecturer une expression de la « fonction sous-tangente » à $\mathscr{C}_f$ utilisant f et sa dérivée.
- La deuxième question de l'exercice amène à déterminer toutes les fonctions à sous-tangente constante (composées d'une fonction affine par l'exponentielle).

Ce germe de ressource peut être proposé comme application à la question de cours sur la résolution de l'équation différentielle $y' = k.y$ ou bien comme introduction à cette même question de cours (dans ce cas la question 2. c de l'activité sur la fiche élève devrait être modifiée, par exemple : « Trouver des fonctions f pour lesquelles la distance PN est constante ») ; la résolution en classe de l'équation différentielle $y' = k.y$ permet alors d'obtenir toutes les fonctions f pour lesquelles la distance PN est constante.

Origine : **Sous-tangente fiche élève** : document élève rédigé à partir de l'exercice 2 du recueil d'exemples d'exercices du baccalauréat série S diffusé en 2003 par l'Inspection Générale

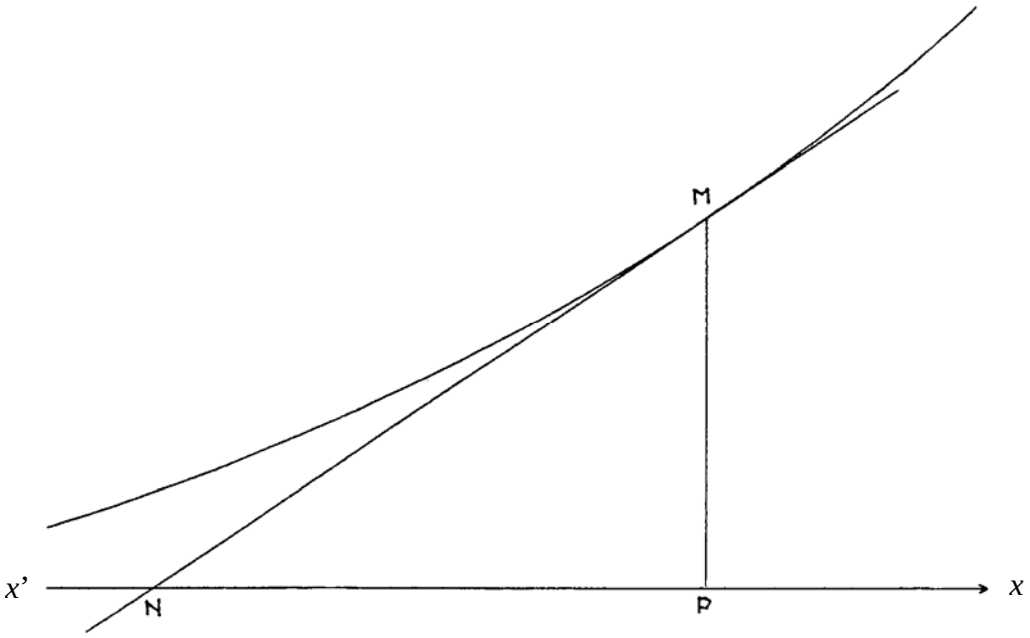
Accès au sommaire

Le graphique ci-dessous montre une partie de la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ dans un repère orthonormal dont seul apparaît l'axe des abscisses $x'x$.

1.. a) Pour tout point M d'abscisse t appartenant à $\mathscr{C}$, on considère le point P de coordonnées (t , 0) et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Montrer que la distance PN est constante.

b) En déduire une construction de l'axe des ordonnées sur le graphique ci-dessous.



2. Dans la suite de l'exercice, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f , on considère le point P de coordonnées (t , 0) et le point N, point d'intersection de la tangente en M à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

a) Calculer la distance PN en fonction de f (t) et de f ' (t).

b) Montrer que la distance PN est constante si et seulement si f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = k.y$.

c) En déduire les fonctions f pour lesquelles la distance PN est constante.

Accès au sommaire

Scénario :

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée[1]
1	Les élèves	Découverte et lecture complète de l'énoncé	individuelle	fiche élève	3 min
2	Les élèves	Question 1.a) de l'exercice - Noter au moins une action à réaliser pour répondre à la question. - Proposer un plan de solution.	individuelle	Travail « papier crayon »	5 min
3	Le professeur et la classe	Débat sur le plan de solution	collective		5 min
4	Les élèves	Réalisation du plan de solution issu du débat	individuelle	Travail « papier crayon »	8 à 10 min
5	Les élèves	Question 1. b)	individuelle	Travail « papier crayon », à faire ou finir à la maison	2 min
6	Le professeur et la classe	- Reconnaître graphiquement le résultat : la sous-tangente à l'exponentielle est constante. - En est-il de même pour d'autres fonctions « usuelles » (affine, carré, racine carrée, sinus, et éventuellement cube et inverse) et sinon, quel modèle la sous-tangente suit-elle dans chaque cas ?	collective	Fichiers : [St 1 e.fig] [St 2 a.fig] [St 3 c.fig] [St 4 rc.fig] [St 5 s.fig] [St cu.fig] [St i.fig]	10 à 12 min
7	Les élèves	Questions 2 a) de l'exercice : même plan de solution qu'au 1.	individuelle	Travail « papier crayon »	10 min
8	Les élèves	Questions 2 b) et 2 c) : mise en équation, recherche parmi les divers modèles connus, en faisant ressortir si nécessaire : $(e^u)' = u'.e^u$	individuelle	Travail « papier crayon »	10 min

Accès au sommaire

[1] Cette durée est donnée à titre indicatif et prévisionnel

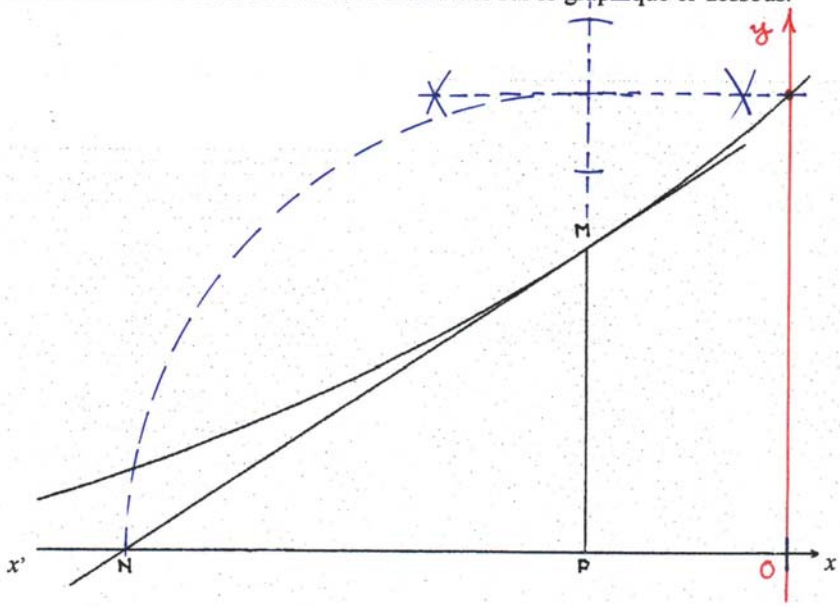
La question 1. b) de la fiche élève :

« En déduire une construction de l'axe des ordonnées sur le graphique »

Voici celle proposée par un élève (directement sur la fiche élève) :

Le graphique ci-dessous montre une partie de la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ dans un repère orthonormal dont seul apparaît l'axe des abscisses $x'x$.

1. a) Pour tout point M d'abscisse t appartenant à $\mathscr{C}$, on considère le point P de coordonnées (t , 0) et le point N, point d'intersection de la tangente en M à $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
Montrer que la distance PN est constante
b) En déduire une construction de l'axe des ordonnées sur le graphique ci-dessous.



2. Dans la suite de l'exercice, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f, on considère le point P de coordonnées (t , 0) et le point N, point d'intersection de la tangente en M à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.
a) Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.
b) Montrer que la distance PN est constante si et seulement si f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = k.y$.
c) En déduire les fonctions f pour lesquelles la distance PN est constante.

Accès au sommaire

Nom des fichiers :

St 1 e.fig : sous-tangente à la courbe de la fonction exponentielle
St 2 a.fig : idem pour une fonction affine,
St 3 ca.fig : pour la fonction carré,
St 4 rc.fig : : racine carrée,
St 5 s.fig : : sinus,
St cu.fig : : cube,
St i.fig : : inverse.

Logiciel utilisé :

Cabri II

Description et mode d'emploi :

Utilisation en rétroprojection, classe entière

- curseur en position gauche :

le déplacement de M sur la courbe $\mathscr{C}$ permet d'observer la sous-tangente à la fonction représentée (longueur du segment [PN]) ;

- curseur en position droite :

un nouveau curseur renvoie verticalement le segment [PN] ; en plaçant en mode trace l'extrémité, autre que P, de ce segment vertical, on peut reconnaître le modèle de la sous-tangente à la fonction représentée.

Accès au sommaire